PROJET 1

Important : Sauf mention contraire, toutes les questions devront être traitées à l'aide de maple.

1 Constante de Smarandache

Question 1: Construire la liste des nombres entiers p_n tels que $2 \leq p_n \leq 200$. Vérifier que l'on en dénombre 46.

Question 2: Tracer, sur une même représentation graphique, les 45 fonctions définies par

$$x \in [0,1] \to p_{n+1}^x - p_n^x - 1$$

pour $n \in \{2, \ldots, 46\}$.

Question 3: Combien de racines chacune de ces fonctions admet-elle dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$? On considère les 45 équations

$$p_{n+1}^x - p_n^x = 1$$

pour $n \in \{2, \ldots, 46\}$. Construire l'ensemble regroupant les racines de chacune de ces équations et déterminer la plus petite de ces racines ainsi que les deux nombres premiers auxquels elle est associée. Cette racine est connue sous le nom de *constante de Smarandache*.

2 Trajectoire d'un projectile.

On se propose dans ce problème d'étudier la trajectoire, dans un référentiel galiléen, d'un projectile lancé avec une vitesse initiale. La trajectoire de ce projectile est gouvernée par le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha_0) \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha_0) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{array}\right. \tag{1}$$

où l'on suppose $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$, $g > 0$ et $h \geq 0$.

Question 4: Résoudre ce système différentiel. Définir les fonctions `posx` et `posy` qui renvoient indépendamment les valeurs des coordonnées x et y au temps t.

Question 5: Déterminer, en fonctions des paramètres α_0, v_0, h et g, l'instant t_f auquel le projectile touche le sol. Déterminer également l'instant t_{max} auquel le projectile atteint une hauteur maximale.

Question 6: Déterminer la hauteur moyenne du projectile lors du vol.

Question 7: On considère, dans les unités appropriées, les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4},\ v_0 = 1,\ g = 10,\ h = 2.$$

Représenter la courbe de la trajectoire.

3 Polynômes de Lagrange

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on considère un ensemble de $n + 1$ points

$$a \leq x_0^n < x_1^n < \cdots < x_n^n \leq b$$

et l'on définit la famille de polynôme L_k^n, pour $k \in 0, 1, \ldots, k$, par

$$L_k^n(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^n}{x_k^n - x_i^n}.$$

On définit alors le polynôme P par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k^n) L_k^n(x).$$

Ce polynôme est appelée *polynôme d'interpolation de Lagrange de* f associé à l'ensemble $\{x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots,\ x_n^n\}$.

Question 8: Démontrer, dans le rapport écrit, que P est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vérifie, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, l'égalité

$$P(x_k^n) = f(x_k^n).$$

Ecrire une procédure `subdiv` qui, recevant en paramètres une fonction f, les bornes a et b d'un intervalle sur lequel elle est continue et un entier n strictement supérieur à 1, génère la subdivision de $[a, b]$ en $n + 1$ points équirépartis notés x_k^n avec $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ainsi que la liste des $f(x_k^n)$.

Question 9: En déduire une procédure `polyLag` qui, étant donnés une fonction f, les bornes a et b d'un intervalle sur lequel elle est continue et un entier n strictement supérieur à 1, renvoie, sous forme développée, l'expression du polynome d'interpolation de Lagrange de f associé à la subdivision en $n + 1$ points équirépartis de $[a, b]$. Convertir cette expression en fonction.

Question 10: Définir la fonction $f(x) = x\cos(x)$ sur l'intervalle $[-5, 5]$. Représenter, sur un même graphique, la fonction f et les polynômes d'interpolations de Lagrange de f obtenus avec `polyLag` pour $n = 4,\ 10,\ 15,\ 20$. Chaque courbe devra avoir une couleur spécifique.

Question 11: Définir la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$. Représenter, sur un même graphique la fonction g et son polynôme d'interpolation de Lagrange associée à la subdivision en $n+1$ points équirépartis de $[-5, 5]$ pour $n = 4,\ 10,\ 15,\ 20$. Qu'observe-t-on? Ce phénomène est appelé *Phénomène de Runge*.

Question 12: Même question en utilisant les *points d'interpolation de Tchebychev* :

$$x_i^n = -5 + 5\left(1 + \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)\right),\ i = 0, \ldots, n.$$

Comparer les résultats avec les précédents. Essayer d'expliquer pourquoi l'interpolation obtenue est meilleure.

4 Une étude d'opérateur Linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée. On s'intéresse à l'opérateur f_M défini par

$$f_M \ : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to XM - MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Question 13: Ecrire une procédure `Matf` qui reçoit en entrée une matrice M à coefficients réels de taille $n \times n$ et qui renvoie la matrice représentative de f_M (de taille $n^2 \times n^2$) dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 14: Définir les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de f_A et f_B. Conjecturer une relation générale entre les valeurs propres de M et celles de f_M.

Question 15: Définir aléatoirement deux matrices R_1 et R_2 de tailles respectives 5×7 et 7×5 (on pourra utiliser la fonction **randmatrix**). Calculer la matrice produit $R = R_1.R_2$.

Question 16: Définir la matrice $H = (h_{i,j})$ de taille 5×5 telle que $h_{i,j} = \frac{1}{i+j}$, quel que soit le couple $(i,j) \in \{1, \ldots, 10\}^2$.

Question 17: Tester la validité de la conjecture pour R et H avec des valeurs approchées

5 Densité des nombres premiers

Il est bien connu qu'il existe une infinité de nombres premiers. On se propose d'étudier la proportion qu'ils représentent parmi l'ensemble des nombres entiers naturels. Pour cela, on commence par étudier la proportion de nombres entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ lorsque n est un entier naturel fixé et l'on fait ensuite tendre n vers l'infini.

Question 18: Construire une procédure `densprem` qui reçoit un entier naturel n et renvoie la proportion de nombres premiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Question 19: On appelle *nombres premiers jumeaux* deux entiers naturels de la forme p et $p+2$ tels que p et $p+2$ soient tous les deux premiers. Construire une procédure `denspremjumeaux` qui reçoit un entier naturel n et renvoie la proportion de nombres premiers jumeaux dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Question 20: Etudiez les proportions de nombres entiers et nombres entiers jumeaux parmi les entiers naturels. On pourra s'aider de représentations graphiques.